

无理不等式的解法

姚建慧

上海市闵行中学数学组

2006-10-16

提纲

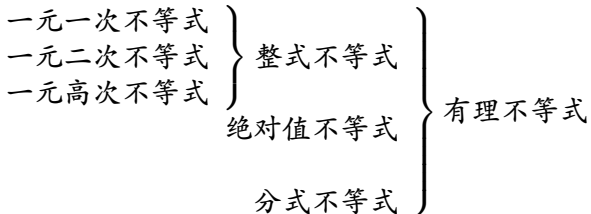
- 1 不等式的分类
- 2 新课讲解
 - 定义,分析及结论一
 - 结论二
 - 结论三
- 3 练习小结

框架

- 1 不等式的分类
- 2 新课讲解
 - 定义,分析及结论一
 - 结论二
 - 结论三
- 3 练习小结

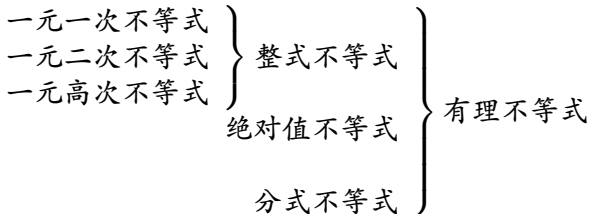
不等式的分类

● 不等式的简单分类



不等式的分类

● 不等式的简单分类



● 今天我们学习一下无理不等式的解法.

框架

- 1 不等式的分类
- 2 新课讲解
 - 定义,分析及结论一
 - 结论二
 - 结论三
- 3 练习小结

框架

- 1 不等式的分类
- 2 新课讲解
 - 定义,分析及结论一
 - 结论二
 - 结论三
- 3 练习小结

定义,分析及结论一

定义 无理不等式一般是指在根号下含有未知数的不等式,今天我们要主要研究在二次根号下含有未知量的无理不等式的解法.

定义,分析及结论一

定义 无理不等式一般是指在根号下含有未知数的不等式,今天我们要主要研究在二次根号下含有未知量的无理不等式的解法.

例1 解不等式 $\sqrt{3x-4} - \sqrt{x-3} > 0$.

定义,分析及结论一

定义 无理不等式一般是指在根号下含有未知数的不等式,今天我们主要研究在二次根号下含有未知量的无理不等式的解法.

例1 解不等式 $\sqrt{3x-4} - \sqrt{x-3} > 0$.

分析 如何解此不等式? \rightarrow (移项)平方 \rightarrow 解一元一次不等式.
上述变形都是同解变形吗?

定义、分析及结论一

定义 无理不等式一般是指在根号下含有未知数的不等式,今天我们主要研究在二次根号下含有未知量的无理不等式的解法.

例1 解不等式 $\sqrt{3x-4} - \sqrt{x-3} > 0$.

分析 如何解此不等式? \rightarrow (移项)平方 \rightarrow 解一元一次不等式.
上述变形都是同解变形吗?

解: 移项,得 $\sqrt{3x-4} > \sqrt{x-3}$

$$\therefore \text{该不等式等价于} \begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 3x-4 > x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ x \geq 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

\therefore 该不等式的解集为 $[3, +\infty)$.

定义,分析及结论一

- 这就是我们要研究的题型 I :

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \text{ 型} \iff \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \end{array} \right\} \text{ 定义域要求}$$

定义,分析及结论一

- 这就是我们要研究的题型 I :

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \text{ 型} \iff \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \end{array} \right\} \text{ 定义域要求}$$

- 通过这个例题(题型)我们可以发现: 在解无理不等式的时候,关键是找出与其同解的有理不等式组,而解有理不等式组(如:一元一次不等式组、一元二次不等式组和一元高次不等式组等等)都是我们比较拿手的.
简言之就是: 无理不等式 \iff 有理不等式
即通常所谓的无理不等式的有理化解法.

定义,分析及结论一

练习 解下列不等式:

$$(1) \sqrt{1-x} - \sqrt{3x-2} \leq 0$$

$$(2) \sqrt{5-2x} > \sqrt{x-1}$$

定义,分析及结论一

练习 解下列不等式:

$$(1) \sqrt{1-x} - \sqrt{3x-2} \leq 0$$

$$(2) \sqrt{5-2x} > \sqrt{x-1}$$

答案 (1) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

(2) $\left[1, \frac{4}{3}\right)$

框架

- 1 不等式的分类
- 2 新课讲解
 - 定义,分析及结论一
 - 结论二
 - 结论三
- 3 练习小结

结论二

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} > x-1$

结论二

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} > x-1$

分析 我们遇到的困难主要有:

结论二

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} > x-1$

分析 我们遇到的困难主要有:

- ① 根式有意义

结论二

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} > x-1$

分析 我们遇到的困难主要有:

- ① 根式有意义
- ② 去根号

结论二

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} > x-1$

分析 我们遇到的困难主要有:

- ① 根式有意义
- ② 去根号
- ③ 根号去掉以后, 是否还与原来的不等式等价

结论二

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} > x-1$

分析 我们遇到的困难主要有:

- ① 根式有意义
- ② 去根号
- ③ 根号去掉以后, 是否还与原来的不等式等价

☺ 解不等式所进行的变换一定要保证是等价变换.

结论二

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} > x-1$

分析 我们遇到的困难主要有:

- ① 根式有意义
- ② 去根号
- ③ 根号去掉以后, 是否还与原来的不等式等价

☺ 解不等式所进行的变换一定要保证是等价变换.

引导 $a > b \implies a^2 > b^2$ 是否一定成立? 若不成立, 需要什么条件?

结论二

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} > x-1$

分析 我们遇到的困难主要有:

- ① 根式有意义
- ② 去根号
- ③ 根号去掉以后, 是否还与原来的不等式等价

☺ 解不等式所进行的变换一定要保证是等价变换.

引导 $a > b \implies a^2 > b^2$ 是否一定成立? 若不成立, 需要什么条件?

☺ 讨论 $x-1$ 的符号!

结论二

- 这就是我们要研究的题型 II:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \text{ 型} \iff \text{I} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad \text{或 II} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

结论二

- 这就是我们要研究的题型 II:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \text{ 型} \iff \text{I} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad \text{或 II} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

练习 $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 1 + 2x$

结论二

- 这就是我们要研究的题型 II:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \text{ 型} \iff \text{I} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad \text{或 II} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

练习 $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 1 + 2x$

- ☺ 一定要注意对于 $g(x)$ 的正负进行讨论, 并且原不等式的解集应当是与其等价的两个不等式组解集的并集, 尤其要注意结合数轴找出它们的并集.

框架

- 1 不等式的分类
- 2 新课讲解
 - 定义,分析及结论一
 - 结论二
 - 结论三
- 3 练习小结

结论三

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} < x-1$

结论三

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} < x-1$

- 这就是我们要研究的题型Ⅲ：

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \text{ 型} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

结论三

变题 将练习中的(2)变形为 $\sqrt{5-2x} < x-1$

- 这就是我们要研究的题型Ⅲ：

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \text{ 型} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

答案 $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

框架

- 1 不等式的分类
- 2 新课讲解
 - 定义,分析及结论一
 - 结论二
 - 结论三
- 3 练习小结

练习小结

练习 (1) $x - 5\sqrt{x} + 6 < 0$
(2) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3$

练习小结

练习 (1) $x - 5\sqrt{x} + 6 < 0$
(2) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3$

小结

练习小结

练习 (1) $x - 5\sqrt{x} + 6 < 0$
(2) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3$

小结

- 1 解无理不等式的基本方法就是将其转化为有理不等式组，在转化过程中一定要注意等价变换；

练习小结

练习 (1) $x - 5\sqrt{x} + 6 < 0$
(2) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3$

小结

- ① 解无理不等式的基本方法就是将其转化为有理不等式组，在转化过程中一定要注意等价变换；
- ② 三种题型的等价变形请务必分清，关键是考虑我们以前常常讲的无理根式（函数）的定义域问题；

练习小结

练习 (1) $x - 5\sqrt{x} + 6 < 0$
(2) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3$

小结

- ① 解无理不等式的基本方法就是将其转化为有理不等式组，在转化过程中一定要注意等价变换；
- ② 三种题型的等价变形请务必分清，关键是考虑我们以前常常讲的无理根式（函数）的定义域问题；
- ③ 注意题型Ⅱ中原不等式的解集应当是两个不等式组解集的并集；同时在解决多个不等式解集的交集问题时，应当结合数轴。

练习小结

练习 (1) $x - 5\sqrt{x} + 6 < 0$
(2) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3$

小结

- ① 解无理不等式的基本方法就是将其转化为有理不等式组，在转化过程中一定要注意等价变换；
- ② 三种题型的等价变形请务必分清，关键是考虑我们以前常常讲的无理根式（函数）的定义域问题；
- ③ 注意题型Ⅱ中原不等式的解集应当是两个不等式组解集的并集；同时在解决多个不等式解集的交集问题时，应当结合数轴。

作业 (1) $\sqrt{2x + 1} > \sqrt{x + 1} - 1$
(2) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{6x - x^2} > 3$

完

thanks!